

Modern Portfolio Theory

MPT를 활용한 자산배분

Yonsei Investment Group

41기 황희원

July 2023

Table of Contents

I. Modern Portfolio Theory

II. Application to DB GAPS

I. Excel Implementation

I. Python Implementation





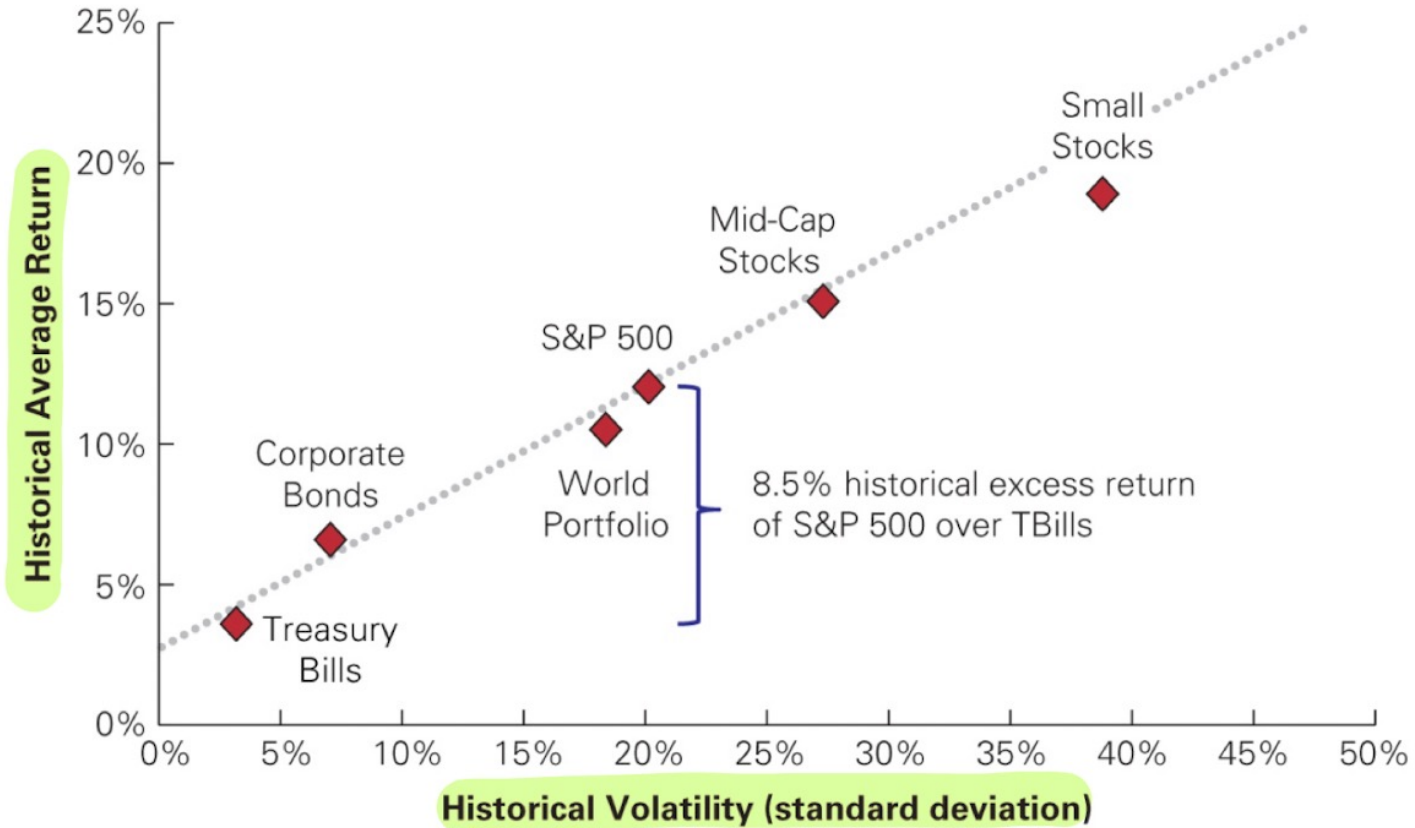
Harry Markowitz “남친짤”

- “Portfolio Selection” by H. Markowitz (1952)
- **Risk-averse(위험회피형) 투자자에게 ‘최적’의 포트폴리오는?**
- 분산투자(diversification)을 통해 risk를 최소화하고 기대수익률을 극대화할 수 있는 포트폴리오
- N개의 자산으로 이루어진 포트폴리오의 기대수익률(expected return), 분산(variance), 상관관계(correlation)를 기반으로 ‘최적’의 포트폴리오 도출
- Nobel Prize



Modern Portfolio Theory

Diversification and Risk Reduction

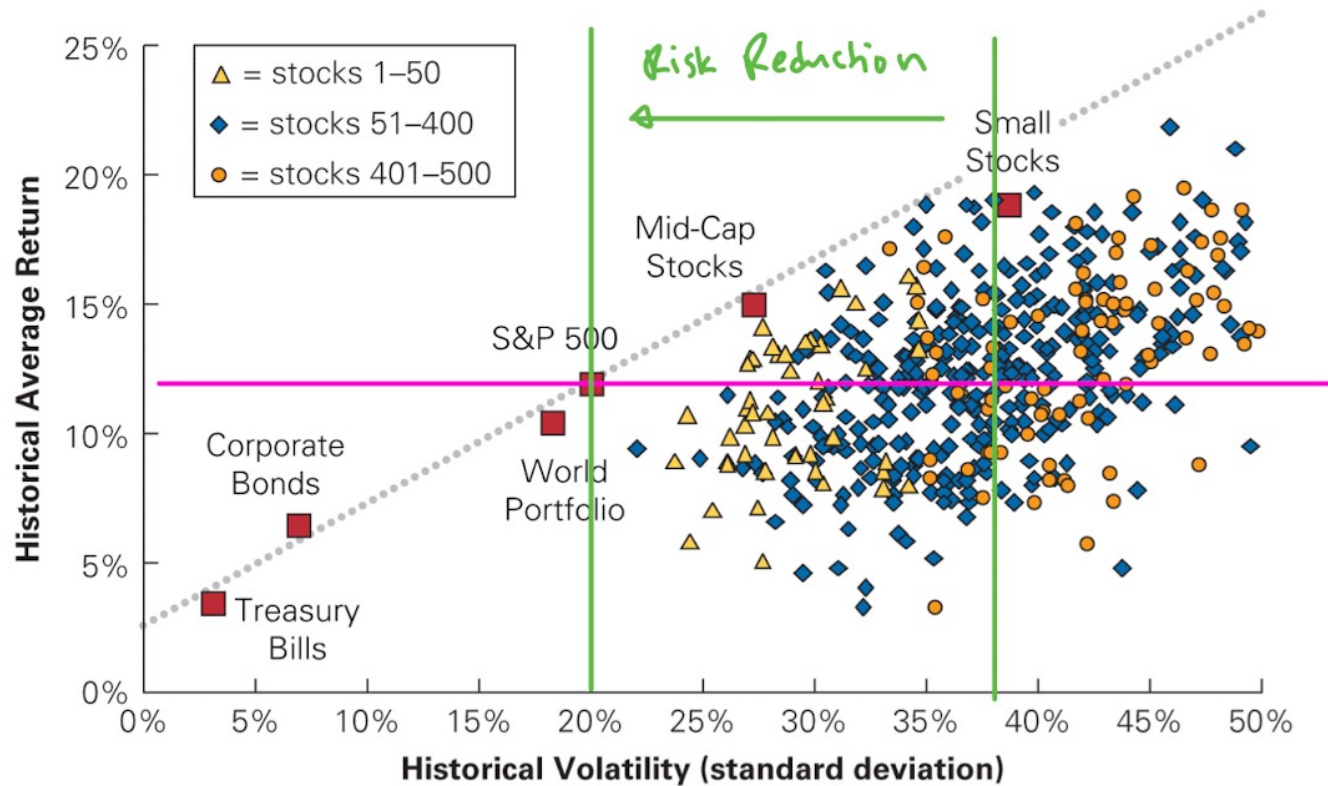


- 자산 별 평균 수익률과 변동성(risk)의 관계는 양의 상관관계를 가짐 (변동성이 높은 자산일수록 평균 수익률이 높음).



Modern Portfolio Theory

Diversification and Risk Reduction



- S&P 500을 500개의 개별 구성 종목으로 세분화해 분석 시 diversification의 risk 절감 효과를 확인할 수 있음.
- S&P 500의 평균 수익률과 500개 구성 종목의 평균 수익률은 유사하지만, S&P 500의 변동성(risk)은 구성 종목의 평균 변동성보다 낮음.
→ 즉, 500개 개별 주식의 분산투자 형태인 S&P 500은 diversification을 통해 risk를 절감.



- Notations: N assets, S possible states, $p(s)$ denotes the probability of state s , $r_i(s)$ denotes asset i 's return in state s
- The portfolio weight for asset i : $w_i = \frac{\text{value of asset } i}{\text{value of all assets in portfolio}}$
- The portfolio return r_p in state s : $r_p(s) = w_1 r_1(s) + w_2 r_2(s) + \dots + w_N r_N(s)$
- Expected return of a portfolio P : $E(r_p) = \sum_{s=1}^S p(s) r_p(s)$ or $E(r_p) = \sum_{i=1}^N w_i E(r_i)$
- Variance of a two-asset portfolio P : $\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \text{Cov}(r_A, r_B)$
 or
 $\sigma_P^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \rho_{A,B} \sigma_A \sigma_B$



Portfolio's Expected Return and Variance

- Notations: N assets, S possible states, $p(s)$ denotes the probability of state s , $r_i(s)$ denotes asset i 's return in state s
- The portfolio weight for asset i : $w_i = \frac{\text{value of asset } i}{\text{value of all assets in portfolio}}$
- The portfolio return r_p in state s : $r_p(s) = w_1r_1(s) + w_2r_2(s) + \dots + w_Nr_N(s)$
- Expected return of a portfolio P : $E(r_p) = \sum_{s=1}^S p(s)r_p(s)$ or $E(r_p) = \sum_{i=1}^N w_iE(r_i)$
- Variance of a two-asset portfolio P : $\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\text{Cov}(r_A, r_B)$
or
 $\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B$

Example: Portfolio(P) comprised of A(30%) and B(70%)

$$A : E(r_A) = 15\%, \quad \sigma_A = 25\%$$

$$B : E(r_B) = 7\%, \quad \sigma_B = 14\%$$

$$E(r_p) = 30\% * 15\% + 70\% * 7\% = 9.40\%$$

 **Correlation between A and B**

$$\sigma_p^2 = 0.3^2 * 0.25^2 + 0.7^2 * 0.14^2 + 2 * 0.3 * 0.7 * \rho_{A,B} * 0.25 * 0.14$$

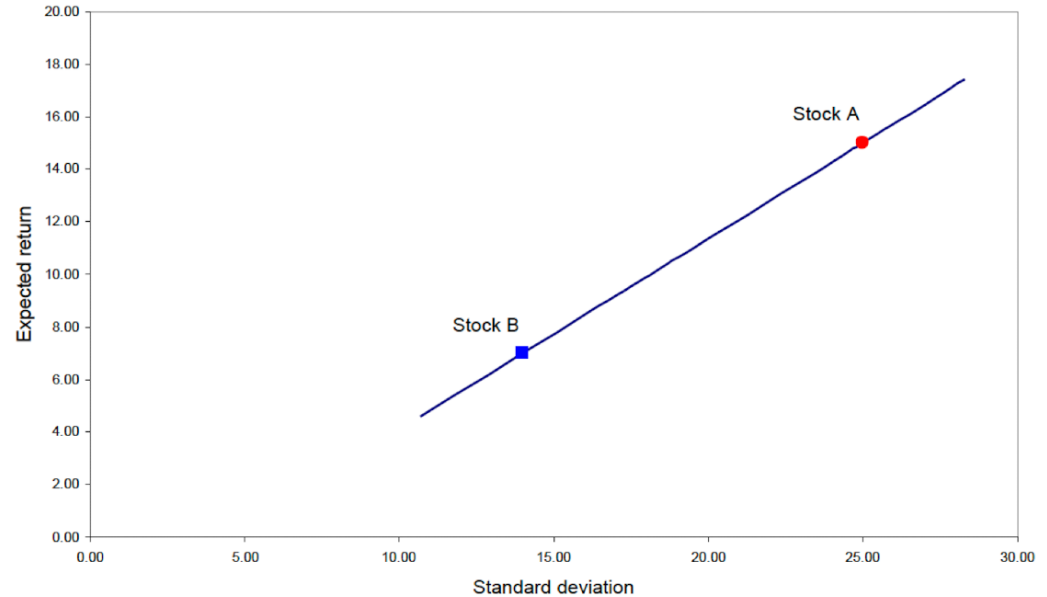


Case 1: $\rho_{AB} = 1$

A : $E(r_A) = 15\%, \sigma_A = 25\%$

B : $E(r_B) = 7\%, \sigma_B = 14\%$

Case1: perfect positive correlation				
Weight A	Weight B	Weight Sum	Expected Return	Standard Deviation
-0.30	1.30	1.00	4.60	10.70
-0.20	1.20	1.00	5.40	11.80
-0.10	1.10	1.00	6.20	12.90
0.00	1.00	1.00	7.00	14.00
0.10	0.90	1.00	7.80	15.10
0.20	0.80	1.00	8.60	16.20
0.30	0.70	1.00	9.40	17.30
0.36	0.64	1.00	9.87	17.95
0.40	0.60	1.00	10.20	18.40
0.46	0.54	1.00	10.67	19.05
0.56	0.44	1.00	11.47	20.15
0.66	0.34	1.00	12.27	21.25
0.76	0.24	1.00	13.07	22.35
0.86	0.14	1.00	13.87	23.45
0.96	0.04	1.00	14.67	24.55
1.00	0.00	1.00	15.00	25.00
1.06	-0.06	1.00	15.47	25.65
1.16	-0.16	1.00	16.27	26.75
1.26	-0.26	1.00	17.07	27.85
1.30	-0.30	1.00	17.40	28.30



- 상관관계가 1인 경우 (완전 양의 상관관계)
- A와 B의 가격 변동이 완벽히 일치함을 의미 → 선형 관계를 형성함.
- 포트폴리오의 변동성이 증가하면 기대수익률 또한 증가.



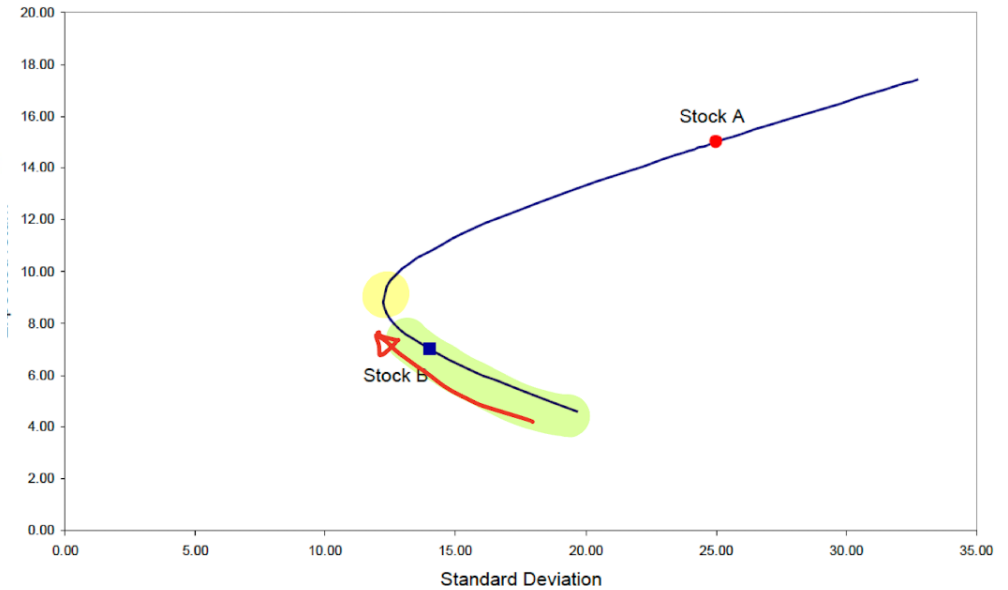
Case 2: $\rho_{AB} = 0$

A : $E(r_A) = 15\%, \sigma_A = 25\%$

B : $E(r_B) = 7\%, \sigma_B = 14\%$

Case2: No correlation				
Weight A	Weight B	Weight Sum	Expected Return	Standard Deviation
-0.30	1.30	1.00	4.60	19.68
-0.20	1.20	1.00	5.40	17.53
-0.10	1.10	1.00	6.20	15.60
0.00	1.00	1.00	7.00	14.00
0.10	0.90	1.00	7.80	12.85
0.20	0.80	1.00	8.60	12.27
0.30	0.70	1.00	9.40	12.34
0.36	0.64	1.00	9.87	12.69
0.40	0.60	1.00	10.20	13.06
0.46	0.54	1.00	10.67	13.75
0.56	0.44	1.00	11.47	15.28
0.66	0.34	1.00	12.27	17.15
0.76	0.24	1.00	13.07	19.27
0.86	0.14	1.00	13.87	21.56
0.96	0.04	1.00	14.67	23.98
1.00	0.00	1.00	15.00	25.00
1.06	-0.06	1.00	15.47	26.49
1.16	-0.16	1.00	16.27	29.06
1.26	-0.26	1.00	17.07	31.68
1.30	-0.30	1.00	17.40	32.77

σ declines



- 상관관계가 0인 경우
- A와 B의 가격 변동이 서로 아무 연관성이 없음을 의미 → A, B의 가격이 함께 움직이는 방법에 일관된 패턴이 없음.
- 포트폴리오의 변동성 감소와 기대수익률 증가가 모두 가능한 구간 존재.



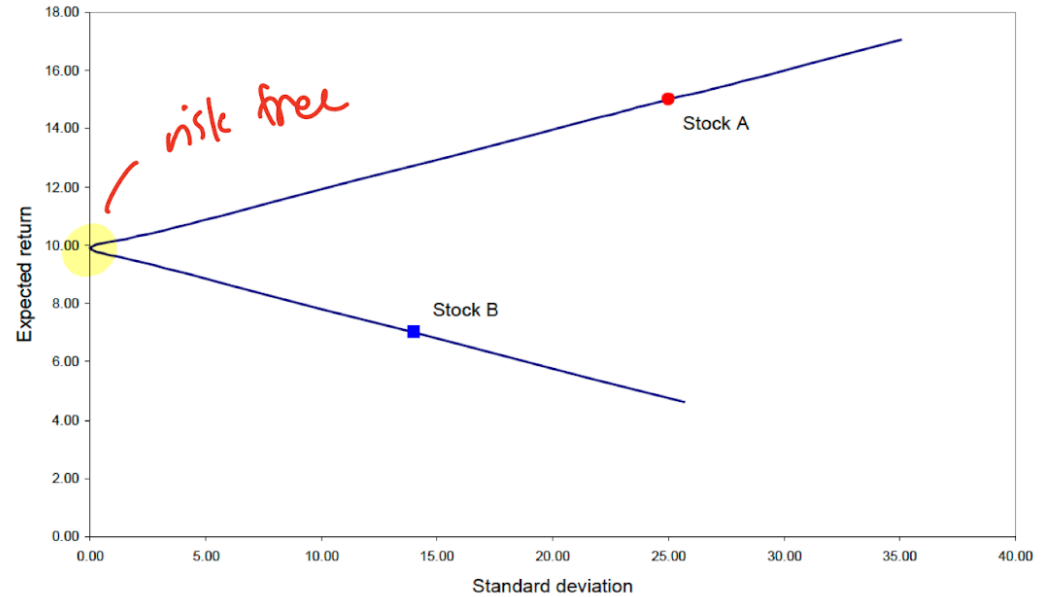
Case 3: $\rho_{AB} = -1$

A : $E(r_A) = 15\%, \sigma_A = 25\%$

B : $E(r_B) = 7\%, \sigma_B = 14\%$

Case3: perfect negative correlation				
Weight A	Weight B	Weight Sum	Expected Return	Standard Deviation
-0.30	1.30	1.00	4.60	25.70
-0.20	1.20	1.00	5.40	21.80
-0.10	1.10	1.00	6.20	17.90
0.00	1.00	1.00	7.00	14.00
0.10	0.90	1.00	7.80	10.10
0.20	0.80	1.00	8.60	6.20
0.30	0.70	1.00	9.40	2.30
0.36	0.64	1.00	9.87	0.00
0.40	0.60	1.00	10.20	1.60
0.46	0.54	1.00	10.67	3.90
0.56	0.44	1.00	11.47	7.80
0.66	0.34	1.00	12.27	11.70
0.76	0.24	1.00	13.07	15.60
0.86	0.14	1.00	13.87	19.50
0.96	0.04	1.00	14.67	23.40
1.00	0.00	1.00	15.00	25.00
1.06	-0.06	1.00	15.47	27.30
1.16	-0.16	1.00	16.27	31.20
1.26	-0.26	1.00	17.07	35.10
1.30	-0.30	1.00	17.40	36.70

risk free

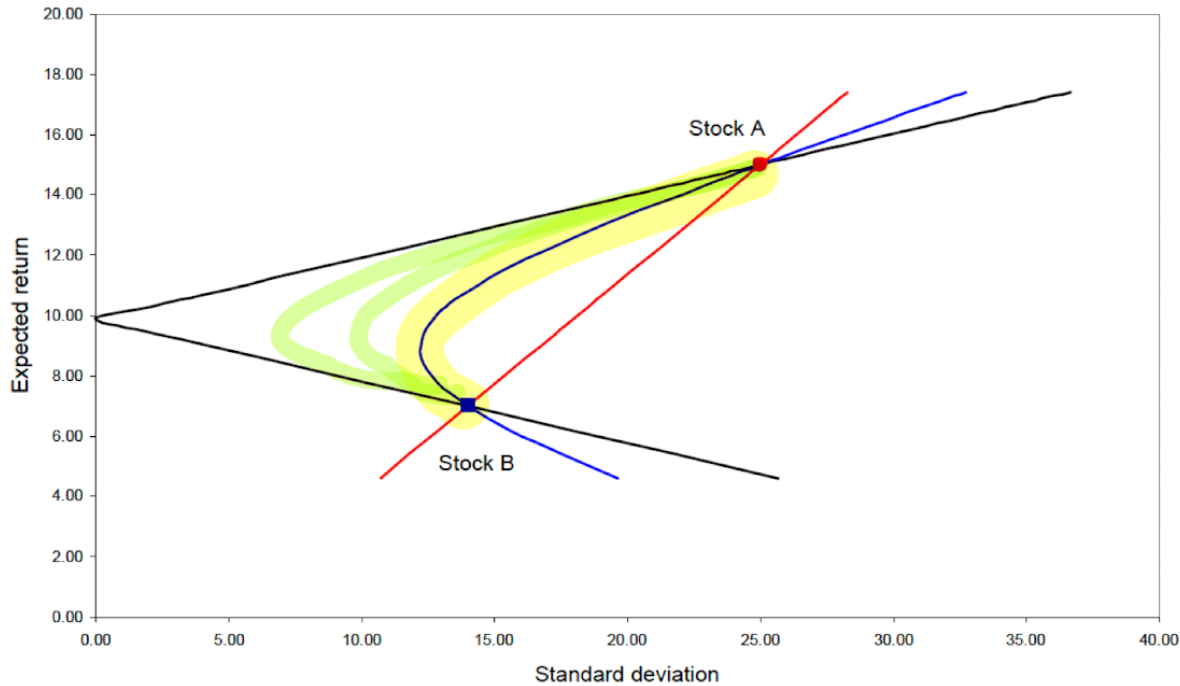


- 상관관계가 -1인 경우 (완전 음의 상관관계)
- A와 B의 가격 변동이 완벽히 반대됨을 의미 → A의 가격이 오르면 B의 가격은 떨어짐.
- 포트폴리오의 변동성 감소와 기대수익률 증가가 모두 가능한 구간이 존재하는 것을 넘어 0 risk 포트폴리오 구축 가능.



Modern Portfolio Theory

Minimum Variance Frontier (MVF)



Weight A	Weight B	Weight Sum	Expected Return	Standard Deviation
-0.30	1.30	1.00	4.60	10.70
-0.20	1.20	1.00	5.40	11.80
-0.10	1.10	1.00	6.20	12.90
0.00	1.00	1.00	7.00	14.00
0.10	0.90	1.00	7.80	15.10
0.20	0.80	1.00	8.60	16.20
0.30	0.70	1.00	9.40	17.30
0.36	0.64	1.00	9.87	17.95
0.40	0.60	1.00	10.20	18.40
0.46	0.54	1.00	10.67	19.05
0.56	0.44	1.00	11.47	20.15
0.66	0.34	1.00	12.27	21.25
0.76	0.24	1.00	13.07	22.35
0.86	0.14	1.00	13.87	23.45
0.96	0.04	1.00	14.67	24.55
1.00	0.00	1.00	15.00	25.00
1.06	-0.06	1.00	15.47	25.65
1.16	-0.16	1.00	16.27	26.75
1.26	-0.26	1.00	17.07	27.85
1.30	-0.30	1.00	17.40	28.30

- MVF: 구성 자산의 조합이 달성할 수 있는 기대수익률마다 변동성을 최소화하는 포트폴리오의 집합.
- 특정 기대수익률을 기준으로 최소 변동성을 갖는 포트폴리오(MVP)의 자산 비중 계산 → 달성 가능한 모든 기대수익률에 반복.
- $-1 \leq \rho \leq 1$ 이기 때문에 모든 MVF는 삼각영역 안에 존재함.
- 두 자산의 상관관계가 낮을수록 diversification으로부터 얻는 benefit이 커짐.

Source: Investment Theory, YIG

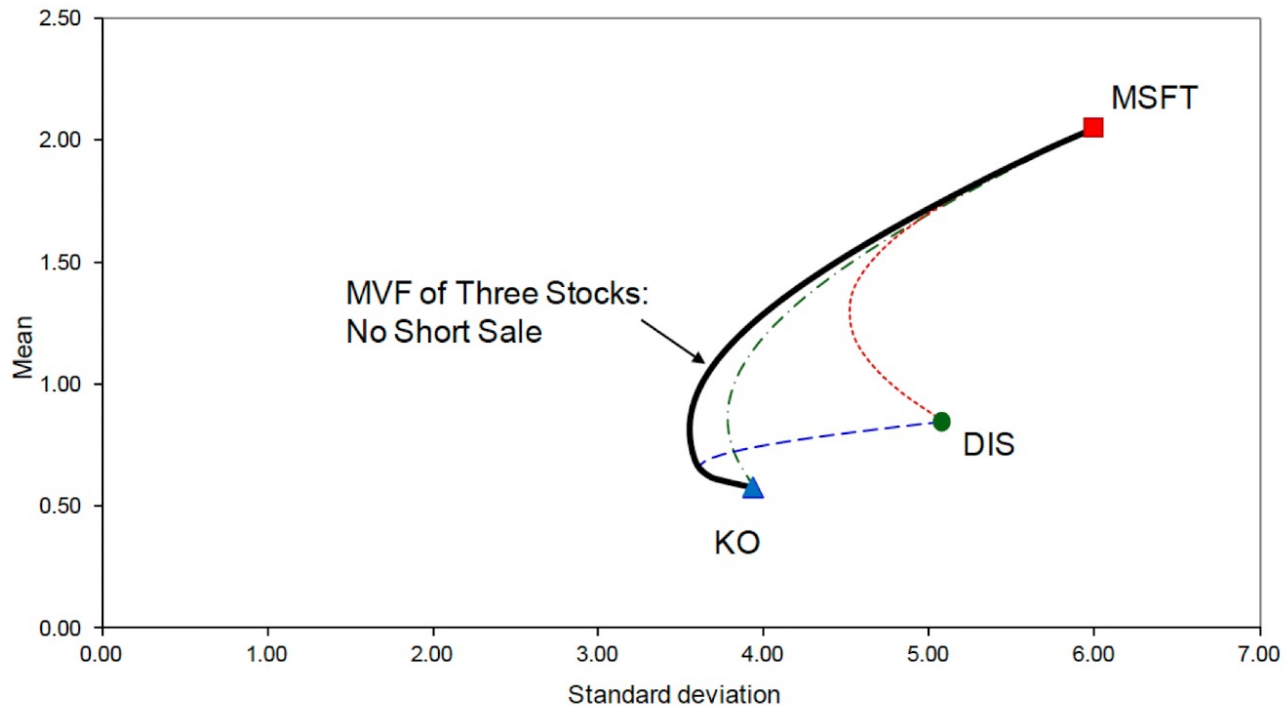


Minimum Variance Frontier (MVF): Three-Asset Portfolio

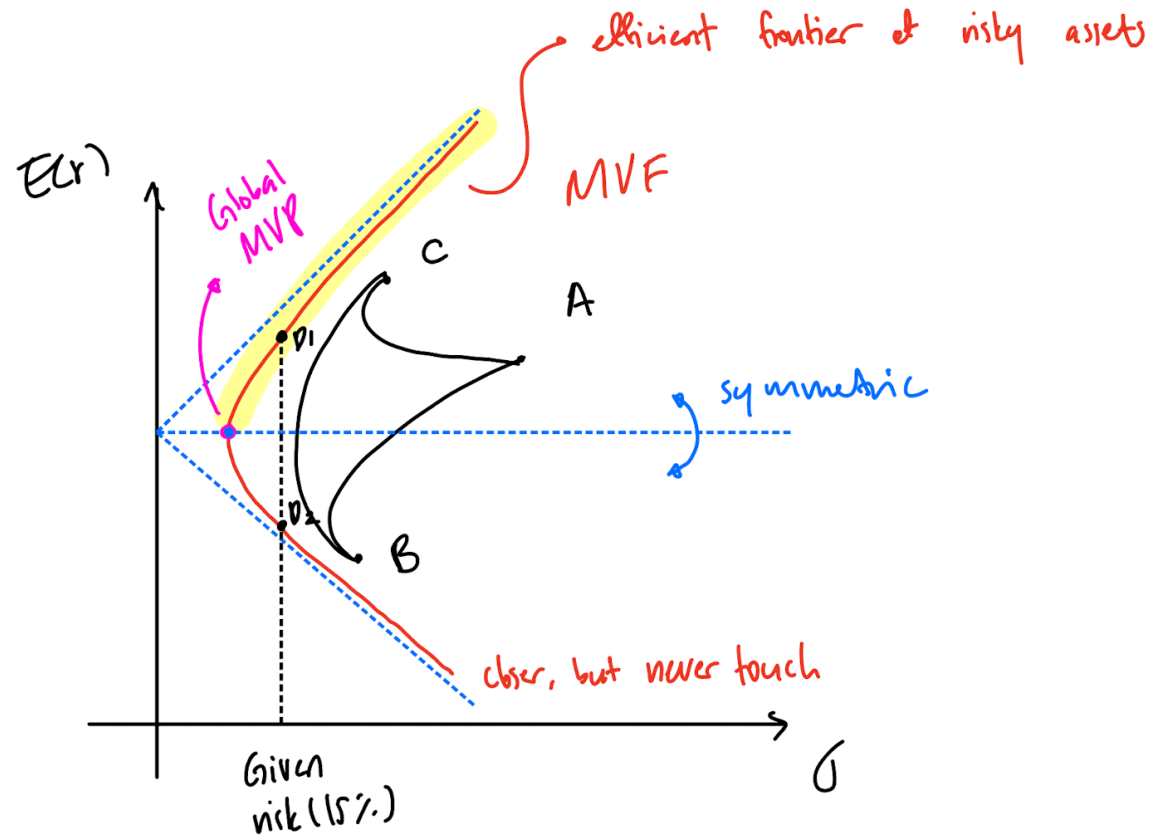
		MSFT	KO	DIS
Mean		2.05	0.57	0.85
Stdev		6.01	3.94	5.09
Correlation	MSFT		0.38	0.36
	KO			0.37

$$E(r_P) = w_A E(r_A) + w_B E(r_B) + w_C E(r_C)$$

$$\sigma^2_P = w^2_A \sigma^2_A + w^2_B \sigma^2_B + w^2_C \sigma^2_C + 2w_A w_B \rho_{A,B} \sigma_A \sigma_B + 2w_B w_C \rho_{B,C} \sigma_B \sigma_C + 2w_A w_C \rho_{A,C} \sigma_A \sigma_C$$



Minimum Variance Frontier (MVF): All Risky Assets



- 시장에 있는 모든 risky asset으로 구성된 포트폴리오의 MVF는 'Global MVP'를 기준으로 대칭인 hyperbola임.
- MVF는 'Global MVP' 기준 상단이 최적 MVP들을 담은 'Efficient MVF'가 됨.
- 같은 변동성을 갖는 두개의 포트폴리오 중 기대수익률이 높은 포트폴리오로 구성되었기 때문.

Source: Investment Theory, YIG



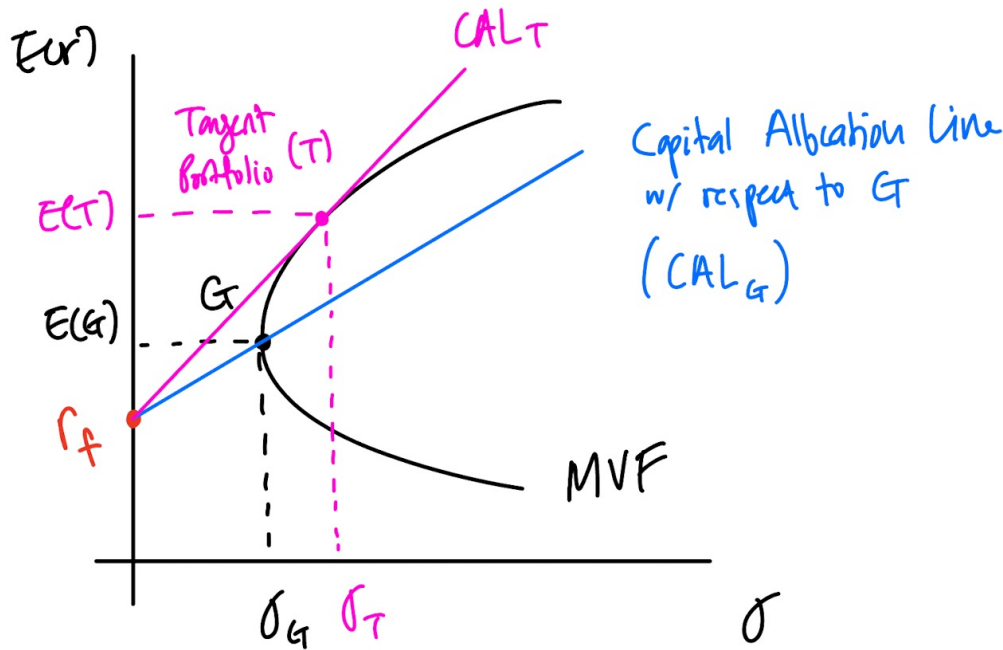


James Tobin “훈남짤”

- J. Tobin (1958)
- **Risky asset**과 ‘**Risk-free asset**’을 동시에 포함하는 포트폴리오는?
- 포트폴리오 선정은 2-step으로 가능:
- 1) Risky asset만으로 구성된 최적 포트폴리오(Optimal Risky Portfolio) 도출
- 2) Optimal Risky Portfolio와 risk-free asset 각각 비중 선정 (투자자의 risk aversion 기반)



Separation Property: Step 1



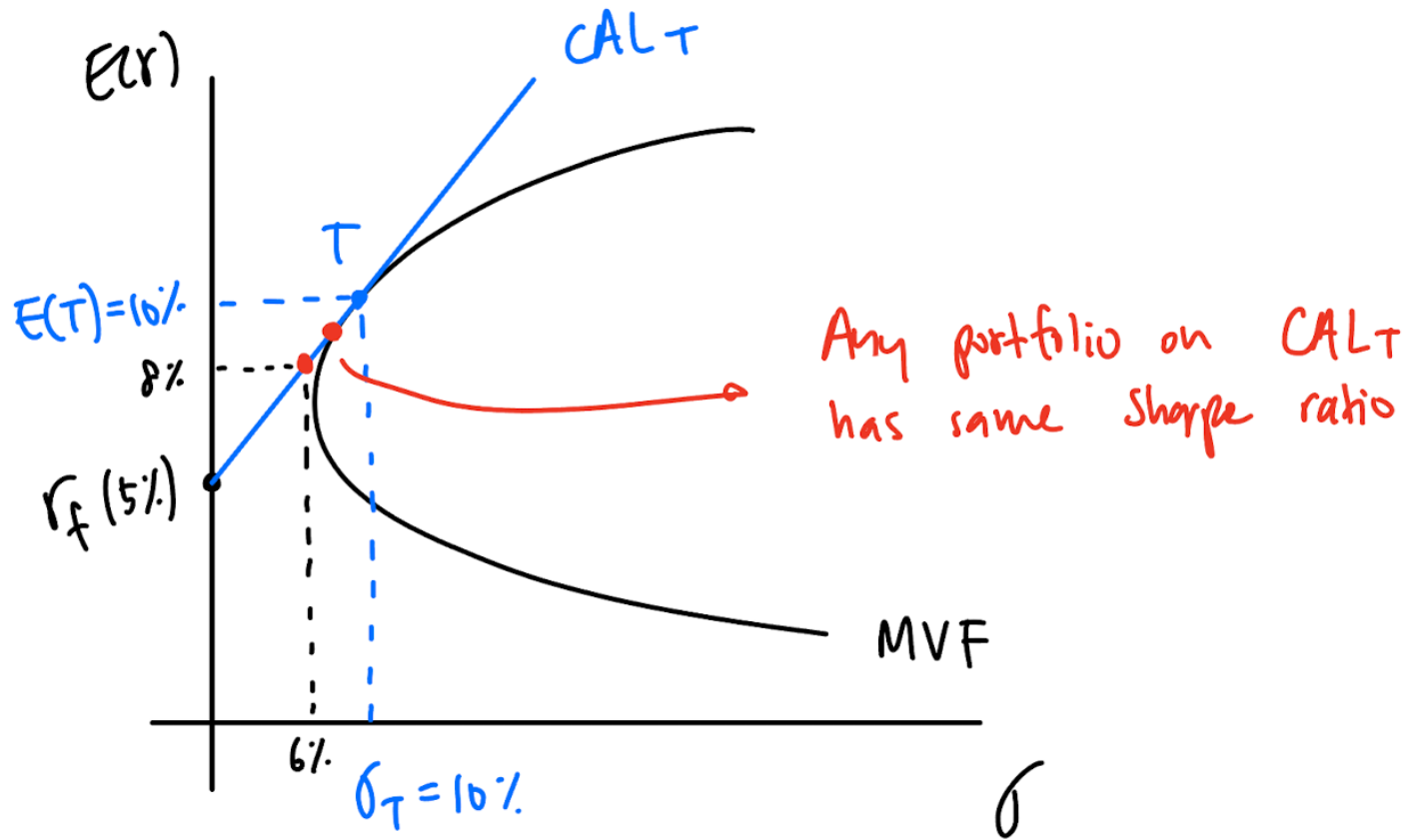
r_f 와 T를 지나는 직선(CAL_T)의 공식:

$$E(r_P) = r_f + \left[\frac{E(r_T) - r_f}{\sigma_T} \right] * \sigma_P$$

↓
Sharpe Ratio of T

- Optimal Risky Portfolio는 어디에?
- Risky asset으로 구성된 모든 최소분산 포트폴리오(MVP)는 MVF위에 있음 → 이 중 최적의 포트폴리오는?
- Remember: 최종 포트폴리오는 Optimal Risky Portfolio와 risk-free asset으로 구성 → 즉, MVP 중 risk-free asset과 조합이 가장 좋은 것이 Optimal Risky Portfolio.
- Optimal Risky Portfolio = risk-free asset과 MVP를 지나는 직선(CAL) 중 기울기가 가장 가파른 직선을 만드는 MVP → 접선 위에 있는 포트폴리오(Tangent Portfolio).
- → 해당 과정은 Sharpe Ratio가 가장 큰 포트폴리오를 찾는 과정과 동일.





- Optimal Risky Portfolio 도출 후 Optimal Risky Portfolio, risk-free asset 각각의 비중 선정.
- → CAL_T 위 있는 점 선정.
- T에 가까울수록 위험자산의 비중이 많아짐 → risk aversion이 낮은 투자자에게 적합.



▣ 투자가능 국내 상장 ETF

구분	축약명	상품명	추종지수	자산기준		상품기준		
				상한	하한	상한	하한	
자산군	국내주식	KOSPI	KODEX 200	KOSPI 200	40	10	40	0
		KOSDAQ	TIGER 코스닥150	KOSDAQ 150			20	0
	해외주식	S&P 500	TIGER 미국S&P500선물(H)	S&P 500 Future Index	40	10	20	0
		STOXX 50	TIGER 유로스탁스50(합성,H)	EURO STOXX 50 Index			20	0
		Nikkei 225	ACE 일본 Nikkei225(H)	Nikkei 225 index			20	0
	국내채권	CSI 300	TIGER 차이나CSI300	CSI 300 index	60	20	20	0
		국채 10년	KOSEF 국고채10년	KOBI 국고채 10년(TR)			50	0
	해외채권	우량회사채	KBSTAR 중기우량회사채(**)	KOBI Credit Index	60	20	40	0
		해외채권	TIGER 단기선진하이일드(합성, H)	Markit iBoxx USD 하이일드 0-5Y			40	5
	원자재	금	KODEX 골드선물(H)	S&P GSCI Gold Index(TR)	20	5	15	0
WTI		TIGER 원유선물Enhanced(H)	S&P GSCI Crude Oil Enhanced	15			0	
리스크 관리 수단	Inverse	KOSPI Short	KODEX 인버스	KOSPI 200 선물지수	20	0	20	0
	FX	US Long	KOSEF 미국달러선물	미국달러 선물지수	20	0	20	0
		US Short	KOSEF 미국달러인버스선물	미국달러 선물지수		0	20	0
	현금	MMF	KOSEF 단기자금	MK 머니마켓 지수(총수익)	50	1		0
		Cash	현금					1

* ETF 상품별 운용사 : KODEX(삼성자산운용), TIGER(미래에셋자산운용), KBSTAR(KB자산운용), KOSEF(키움자산운용), ACE(한국투자신탁운용)

** KBSTAR 우량회사채 분배금 : **권리기준일 보유비중에 분배금수익을 곱하여 지급기준일에 현금으로** 지급

*** KOSPI Short 비중범위 상한은 국내주식 편입비중을 기준으로 하며 최대 20%를 넘을 수 없음



Application to DB GAPS

Excel Implementation

구분 축약명	국내주식		해외주식				국내채권		해외채권	원자재		Inverse	FX		현금
	KOSPI	KOSDAQ	S&P 500	STOXX 50	Nikkei 225	CSI 300	국채 10년	우량회사채	해외채권	금	WTI	KOSPI Short	US Long	US Short	MMF
2023/05/28	0.00341804	-0.0026657	0.00251388	-0.0009924	0.00357398	0.00692595	-0.0021781	-0.0008631	0	-0.0035447	-0.0281518	-0.0032967	-0.0010453	0.00167879	0
2023/06/04	0.00233816	0.02296687	0.00257043	-0.0159713	0.00796439	-0.0016094	0.01251992	0.00240451	0.00371747	0.02232855	-0.0213033	-0.0033482	-0.0153364	0.01453326	0.00092444
2023/06/11	0.00973979	0.02733653	0.00081119	0	-0.0004552	-0.012419	-0.0028495	0.00057636	-0.0036825	0.01032566	-0.0249066	-0.0101237	-0.0126939	0.01268616	0.00063199
2023/06/18	0.00115925	-0.0050161	0.02470007	0.0151117	0.03847024	0.02362637	-0.0057942	-4.81E-05	0.00244898	-0.0007877	0.01827676	-0.0011274	-0.0118153	0.01196953	0.00048579
2023/06/25	-0.0133896	-0.0218795	-0.0101799	-0.0219426	-0.0199737	-0.0210811	-0.0015457	-0.000192	-0.0040833	-0.0209569	-0.0319285	0.01233184	0.0190442	-0.0194595	0.00063119
2023/07/02	-0.0030823	-0.0109449	0.01071071	0.01649621	0.017048	0.01603982	-0.0075198	-0.0013483	0.00451189	-0.0100563	0.00522193	0.00221976	0.0105671	-0.0099174	0.0004852
2023/07/16	0.04874379	0.05189547	0.02749552	0.04008084	0.00797812	0.00438116	0.01377753	0.00429869	0.01554192	0.01733172	0.0447205	-0.0475676	-0.0316233	0.03031974	0.00101794
2023/07/23	-0.0096486	0.07660021	0.00825483	-0.005829	0.00478142	0.00945495	0.00222384	0.00014428	-0.0056497	0.00793966	0.02689487	0.01131222	0.01339609	-0.0133618	0.00072632
2023/07/30	0.0017336	0.03281853	0.0051104	0.00617284	0.00022442	0.03625209	-0.0030329	0.00024048	-0.002826	0.00039573	0.02488152	-0.0033708	-0.0035791	0.00432666	4.84E-05

Source: Quantiwise, YIG



Application to DB GAPS

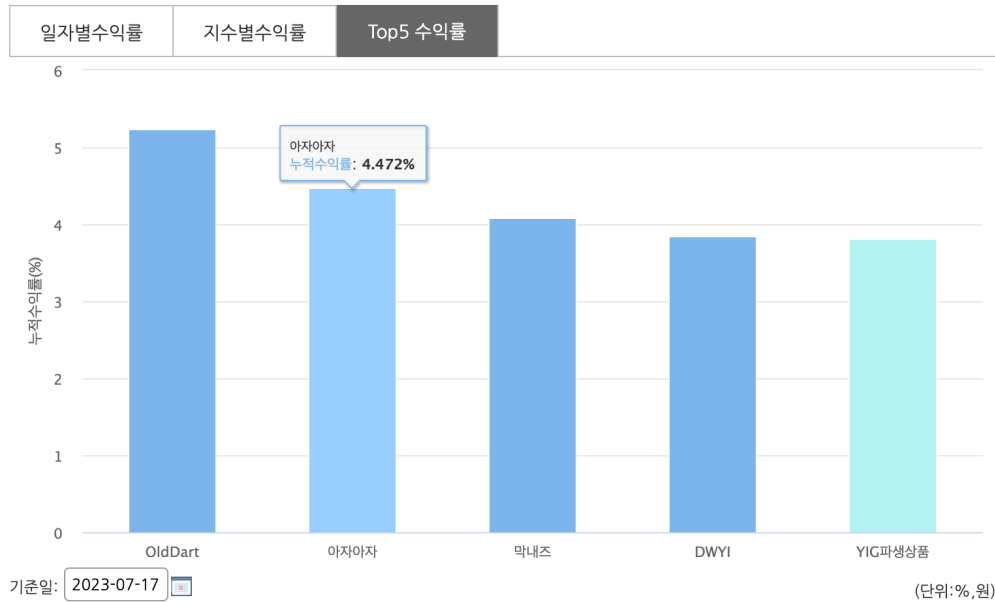
Excel Implementation

Constraints																				
KOSPI	KOSDAQ	S&P 500	STOXX 50	Nikkei 225	CSI 300	국채 10년	우량회사채	해외채권	금	WTI	KOSPI Short	US Long	US Short	MMF	현금					
T	0.4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.5	0.4	0.4	0.15	0.15	0.2	0.2	0.2	0.49	=				
B	0	0	0	0	0	0	0	0.05	0	0	0	0	0	0	0	0.01				
T	0.4			0.4			0.6			0.2			0.2							
B	0.1			0.1			0.2			0.05										
Performance Metrics																				
국내주식			해외주식			국내채권		해외채권		원자재		Inverse		FX		현금	Weight	Standard	Expected	Sharpe
KOSPI	KOSDAQ	S&P 500	STOXX 50	Nikkei 225	CSI 300	국채 10년	우량회사채	해외채권	금	WTI	KOSPI Short	US Long	US Short	MMF	Sum	Deviation	Return	Ratio		
0.000%	18.597%	20.000%	0.000%	20.000%	0.000%	0.000%	15.000%	5.000%	5.000%	0.000%	0.000%	15.403%	0.000%	0.000%	0.000%	99%	0.00771844	0.555%	0.654572747	
0.185966426			40.000%				0.2			0.05		0.154033574						0.698%	max expected return	
std	0	3.3106E-05	5.2181E-06	0	8.7874E-06	0	0	6.139E-08	9.4974E-08	4.0819E-07	0	0	5.5209E-06	0	0	5.3197E-05		0.143%	lost return	
rtn	0.00%	0.32%	0.14%	0.00%	0.12%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.05%	0.00%	0.00%	0.55%				

Source: YIG



Application to DB GAPS Model in Action



순위	팀명	NAV	누적 수익률
5	YIG파생상품	10,382,145,193	3.821
1	OldDart	10,524,322,347	5.243
2	아자아자	10,447,155,272	4.472
3	막내즈	10,409,070,338	4.091
4	DWYI	10,385,117,837	3.851
5	YIG파생상품	10,382,145,193	3.821

순위	팀명	NAV	누적 수익률
1	OldDart	10,524,322,347	5.243
2	아자아자	10,447,155,272	4.472
3	막내즈	10,409,070,338	4.091
4	DWYI	10,385,117,837	3.851
5	YIG파생상품	10,382,145,193	3.821

Source: YIG

